Currículo sem Fronteiras, v. 18, n. 3, p. 445-463, maio/ago. 2018

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS COM GEOMETRIA DINÂMICA E AS FUNÇÕES INVERSÃO EM RELAÇÃO À CIRCUNFERÊNCIA E PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

José Carlos Pinto Leivas

Centro Universitário Franciscano de Santa Maria

Resumo

Neste artigo tratamos de uma pesquisa qualitativa cujo objetivo foi investigar conhecimentos prévios de estudantes de um mestrado profissional em ensino de Matemática. Foram analisados os conhecimentos sobre *softwares* de Geometria Dinâmica e seu emprego na prática profissional desses estudantes, professores de Matemática. Por meio de questionário, investigamos, também, se os mesmos conheciam ou lembravam de funções importantes para desenvolver conceitos de geometrias não euclidianas: inversão em relação à circunferência e projeção estereográfica. O recorte feito para este artigo ilustra propriedades de Geometria Hiperbólica e Elíptica à luz de construções realizadas com o Cabri 3D e com o GeoGebra ao longo do texto bem como alguns fundamentos históricos e conceituais dessas geometrias. O resultado da pesquisa demonstrou total desconhecimento das duas funções e muito pouco sobre *softwares* para o ensino de Geometria. Além disso, demonstrou o interesse dos investigados em conhecê-las, bem como *softwares* e metodologias que proporcionem aperfeiçoamento da prática docente.

Palavras-chave: Geometrias não euclidianas, Geometria dinâmica, Inversão, Projeção Estereográfica.

Abstract

This paper addresses a qualitative research that investigated prior knowledge of students on a professional master's degree in mathematics teaching. We analyzed the knowledge of Dynamic Geometry software and its use on the professional practice of these students, mathematics teachers. Through of a questionnaire, we investigated also whether they knew or they remember functions, which the researcher considers important to develop concepts of non euclidean's geometries: inversion with respect to the circumference and stereographic projection. We illustrate properties of hyperbolic geometry and elliptic constructions carried out with Cabri 3D and GeoGebra throughout the text as well as some historical and conceptual foundations of these geometries. The results showed a total lack of both functions and very little about softwares for teaching geometry. Moreover, the students showed interest in to know them as well as the software and methodologies that provide improvement of teaching practice.

Keywords: *Non Euclidean's Geometries, Dynamic Geometry, Inversion,* Stereographic Projection.

Introdução

A escola brasileira, nos níveis básico, médio, superior e até mesmo na pós-graduação, em alguns estados brasileiros, não tem dado atenção a outras geometrias além da Euclidiana, como comprovamos em algumas de nossas pesquisas (LEIVAS, 2009). A História da Matemática comprova que criações de novas geometrias são bastante antigas se consideramos o tempo em que vivemos no qual os avanços tecnológicos mudam a forma de pensar e agir quase que instantaneamente.

Um dos tratados organizados e mais antigos que se conhece é a obra de Euclides (BICUDO, 2009), a qual foi elaborada em definições, postulados e teoremas de forma organizada e sequenciada logicamente. Um dos primeiros axiomas, sentença aceita como verdade sem demonstração, desta obra, é assim enunciado: "Para cada dois pontos A, B há sempre uma recta *a* que está associada com cada um dos dois pontos A, B." (OLIVEIRA, 2003, p.2). Ele serve de base, por assim dizer, para todo o arcabouço geométrico construído na obra e perdurou por centenas de anos como verdade incontestável, muito embora algumas dúvidas e contestações sobre a obra sempre surgiram. Ainda nos dias de hoje, essa verdade é quase que unanimemente a única desenvolvida e conhecida nos meios escolares.

Em nossa prática de mais de quarenta anos de magistério, temos questionado informalmente estudantes e, também, ouvintes em palestras e conferências sobre a existência de mais de uma linha paralela a uma reta dada por um ponto fora dela (retas em outras geometrias não euclidianas) e, geralmente, a resposta é negativa, ou seja, o que perdura de conhecimento a respeito é o da Geometria Euclidiana.

Na construção euclidiana, o quinto postulado despertou os matemáticos da época de Euclides, bem como os posteriores, pois alguns o consideravam independente dos demais, e isso levou a muitas descobertas matemáticas. Este postulado envolvia a relação de paralelismo entre retas, ou seja, "duas retas *l* e *m* são paralelas se elas não se interseccionam, isto é, nenhum ponto pertence simultaneamente a ambas"[1]. (Greenberg, 1994, p. 19). Seu enunciado "para cada reta *l* e para cada ponto P que não pertence a *l*, existe uma única reta *m* passando por P que é paralela a *l*". (Ibidem, p. 19). O autor provoca o leitor questionando o porquê de o postulado ter gerado controvérsias, pois ele não parece óbvio ou, talvez, porque tenhamos sido condicionados a pensar exclusivamente em termos euclidianos?

Fatos históricos mostram que os estudos mais sistematizados sobre outras geometrias que não a Euclidiana, ocorreram no final do século XVIII e começo do XIX, a partir de tentativas de contradizer o fato de o quinto postulado ser um postulado e, sim, de ser um teorema, o que significa que ele não é independente dos anteriores. Assim, numa linguagem lógica atual, tem-se:

- quinto postulado: $\forall l, \forall P, P \notin l \Rightarrow \exists!\, m$ tal que $P \in m$ e $m \,//\, l$, ou ainda $m \cap l = \emptyset$;
- primeira forma de negação: $\forall l, \forall P, P \notin l \Rightarrow \sim\exists\, m$ tal que $P \in m$ e $m \,//\, l$, ou, ainda; não existe paralela a *l;*
- segunda forma de negação: $\forall l, \forall P, P \notin l \Rightarrow \exists\, m$ tal que $P \in m$ e $m \,//\, l$, ou, ainda, existe pelo menos uma paralela a *l*, o que significa poder existir muitas.

A primeira forma de negar o quinto postulado deu origem à Geometria Elíptica, enquanto que a segunda deu origem à Geometria Hiperbólica. Alguns proeminentes matemáticos como John Wallis; Giovanni Girolamo Saccheri, Johann Heinrich Lambert; Adrien Marie Legendre e Eugenio Beltrami, elaboraram tratados a respeito dessas novas geometrias para a época. Coube a János Bolyai e Nikolai Ivanovich Lobachewsky criarem a chamada Geometria Hiperbólica, enquanto que Felix Christian Klein e Jules Henri Poincaré apresentaram modelos da mesma. Por sua vez, Georg Friedrich Bernhard Riemann, criou um modelo de Geometria Elíptica, enquanto que Johann Carl Friedrich Gauss obteve uma classificação das Geometrias Euclidiana, Elíptica e Hiperbólica a partir do que denominou curvatura gaussiana. (MLODINOW, 2010).

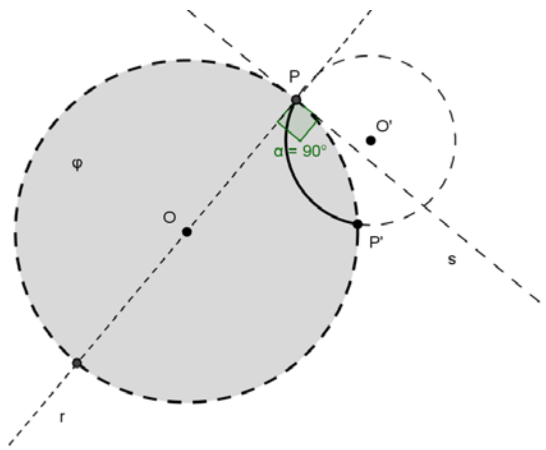
A partir desses pressupostos justificamos pesquisas que abordem geometrias não euclidianas, em seus diversos aspectos, por ainda não serem conhecidas por grande número de estudantes e, até mesmo, professores de Matemática, especialmente da escola básica, por geralmente não constarem no currículo tais assuntos em sua formação inicial e, também na continuada. Desta forma, neste artigo iremos apresentar uma pesquisa realizada sobre conhecimentos prévios de estudantes de um mestrado a respeito de *softwares* de Geometria Dinâmica, bem como do conhecimento de determinadas funções relevantes para o estabelecimento de modelos de Geometria Não-Euclidianas. Neste texto usaremos a última denominação quando quisermos nos referir às duas citadas antes e utilizaremos a expressão não euclidianas quando formos nos referir a qualquer Geometria que não a de Euclides.

Segundo (GREENBERG, 1994, p. 187), a “Geometria hiperbólica é, por definição, a geometria que você começa por assumir todos os axiomas para a geometria neutra e substituindo o postulado das paralelas de Hilbert por sua negação, que chamaremos de ‘axioma hiperbólico’". O autor afirma que, se tivéssemos de deixar de usar os axiomas que temos no momento, muito pouco se poderia fazer de Geometria e, tão pouco, fazer tudo sobre Geometria Euclidiana. J. Bolyai denominou ‘geometria absoluta’ por acreditar que se poderia fazer, com sua criação, tudo sobre geometria. Entretanto, afirma ele, isso é enganador, pois a geometria de J. Bolyai não inclui a Geometria Elíptica. Desta forma, o nome Geometria Neutra, sugerido por W. Prenowitz and M. Jordan (1965), parece ser mais adequado uma vez que o caráter polêmico do axioma das paralelas fica neutro na lista de axiomas de Hilbert.

Henri Poincaré foi um dos matemáticos mais proeminentes que viveu entre os anos de 1854 e 1912. Na construção axiomática de seu modelo, o espaço geométrico é constituído de um disco aberto, como na Geometria Euclidiana. Pontos são tidos e representados como entes primitivos idênticos ao que é feito na axiomática euclidiana, enquanto que retas o são de forma diferenciada. Ele definiu retas como sendo as cordas da circunferência que passam pelo seu centro e, como o disco é aberto, tais cordas não contém seus extremos. Além disso, definiu também como retas os arcos, sem extremos, de circunferência que interseccionam o disco ortogonalmente. Portanto, retas no sentido hiperbólico, podem ser os segmentos de retas sem extremos passando pelo centro do disco ou arcos particulares da circunferência desse disco.

O ângulo entre duas curvas num ponto P é definido como aquele formado pelas retas tangentes às duas curvas naquele ponto. Na figura 1 tal ângulo α em P é determinado pela reta r que contém o diâmetro passando por P [tangente à circunferência menor] e pela reta s, tangente à circunferência maior em P. O GeoGebra fornece a medida de tal ângulo, $\alpha=90^o$, o qual se mantem ao utilizar a dinâmica do software, mostrando que as duas circunferências são ortogonais em P, o que também ocorre no ponto P'.

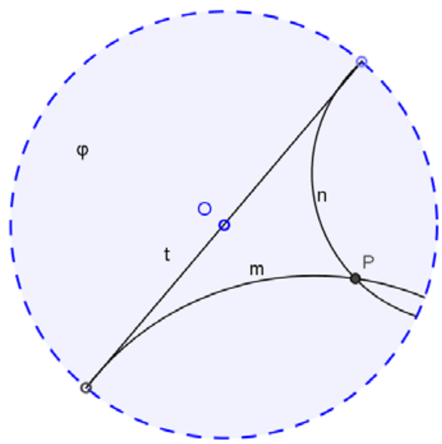
Figura 1. O disco de Poincaré φ.



Fonte: Construção do autor no GeoGebra.

A forma de medir no modelo de Poincaré é diferente da euclidiana e, por este motivo, a congruência de segmentos não se comporta euclidianamente. Entretanto, a congruência de ângulos se comporta como no modelo de Euclides. O paralelismo neste modelo se traduz como citado anteriormente. Assim, na figura 2, ilustramos duas retas *m* e *n* passando por um ponto comum P, não pertencente à reta *t*, as quais não interseccionam a reta *t*, uma vez que os extremos não pertencem às retas hiperbólicas. Portanto, no modelo de Poincaré há pelo menos duas retas passando por um ponto que não pertence a uma terceira reta e que não interseccionam essa.

Figura 2. Paralelismo no modelo de Poincaré.



Fonte: Construção do autor no GeoGebra.

Uma possibilidade para visualizar essas retas ortogonais e compreender melhor o modelo é utilizando a função inversão em relação a circunferências, um dos objetos da investigação constante da pesquisa. Outro modelo hiperbólico vem de um isomorfismo envolvendo pontos e linhas preservando as relações de incidência, estar entre e congruência e para tal se faz necessário o conhecimento da função projeção estereográfica. A pesquisa realizada mostrará um desconhecimento total por parte do grupo focal investigado sobre estas duas funções e, por este motivo, trataremos, a seguir, alguns aspectos dessas duas funções explorando Geometria Dinâmica. Não é objetivo do artigo o estudo de Geometrias Não-Euclidianas e sim, dar uma pequena ilustração de como podem ser introduzidas, mesmo em nível mais elementar, as duas funções.

Visualização e geometria dinâmica

Hoffer (1981, p. 11), em seu artigo “Geometria é mais do que provar”, apresenta o seguinte questionamento feito a seus estudantes nos primeiros anos de universidade a respeito do que gostavam e do que não gostavam nos anos que precederam suas chegadas à universidade: “porque a aversão por geometria?”. Imediatamente o autor afirma serem respostas mais comuns: “tinha de provar teoremas durante todo o ano”; “não entendia o que estava acontecendo”; “o que ficou ao longo do curso foi memorização de demonstrações” e um deles afirmou “fizemos mais teoremas do que geometria”. Se nos reportássemos a nossos estudantes atualmente, em nossa prática profissional, por certo respostas como “não estudamos geometria na escola básica” ou “a geometria que fizemos foi aplicação de fórmulas e cálculos rotineiros”, por exemplo, apareceriam com certa frequência.

Para o autor há outras habilidades da natureza geométrica que podem ter a mesma importância para os alunos, dentre as quais: habilidades visuais, habilidades verbais, habilidades gráficas, habilidades lógicas e habilidades de aplicação.

Nossas pesquisas têm se focado em habilidades visuais em que entendemos "visualização como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas geométricos ou analíticos." (LEIVAS, 2009, p. 22). Portanto, este conceito vai muito além do sentido que é utilizado no senso comum, a saber, ver alguma forma, desenho, gráfico ou objeto com o órgão da visão. Para nós, o termo visual transcende a este aspecto físico. Podemos desenvolver habilidades visuais de diversas formas, sendo uma delas com o uso de *softwares*, particularmente de Geometria Dinâmica.

Segundo Gravina e Basso (2012),

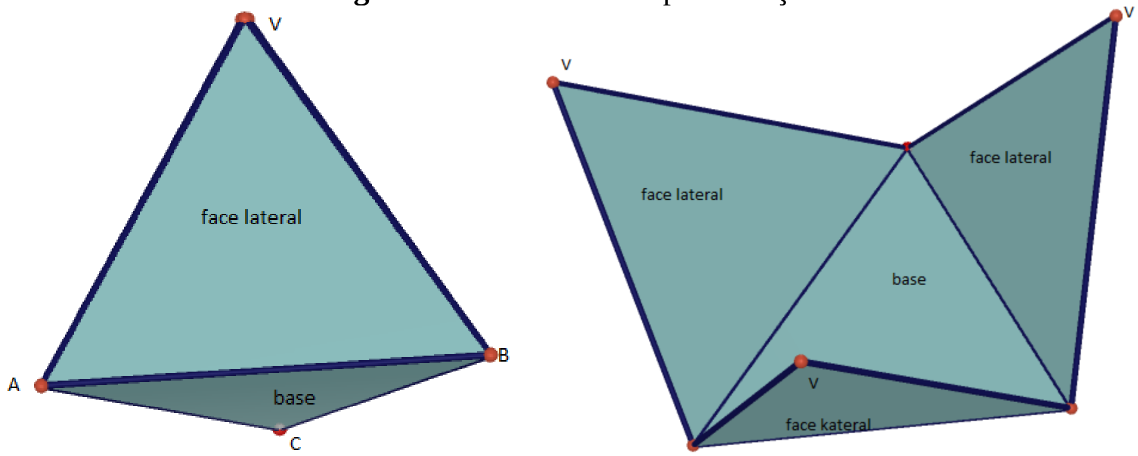
> hoje, a variedade de recursos que temos à nossa disposição permite o avanço na discussão que trata de inserir a escola na *cultura do virtual*. A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam *sistemas dinâmicos de representação* na forma de objetos *concreto-abstratos*. São concretos porque existem na tela e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais. (p.14).

A partir dessa disponibilidade de recursos, não cabe mais à escola tratar conteúdos de forma velha, sem as ferramentas que estão ao nosso dispor atualmente e que despertam o interesse de nossos estudantes; sem desenvolver os processos mentais, por exemplo, oriundos da visualização obtida de forma dinâmica na tela do computador de objetos geométricos vindos de representações algébricas de difícil compreensão para o aluno.

Programas de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra e o Cabri 3D, por exemplo, apresentam as ferramentas que antes eram utilizadas no fazer geométrico, como régua, esquadro, transferidor e compasso, porém de forma virtual e dinâmica o que propicia aos alunos interferirem nas construções construindo, apagando, reconstruindo, sem aquela forma anterior em que havia necessidade de refazer a construção em uma nova folha de papel ou deixando as marcas no mesmo pelo uso da borracha.

Algumas inovações didáticas já foram introduzidas na educação geométrica como, por exemplo, planificar um sólido geométrico ou construí-lo a partir da planificação. Embora isto seja muito relevante para os processos visuais, ele demanda um gasto de tempo, geralmente, não aceito pelos professores. Eles argumentam a necessidade de cumprir seus programas e, muitas vezes, deixam a Geometria para o final do ano letivo e, outras, nem mesmo a desenvolvem com seus alunos. No Cabri 3D, o trabalho de planificar sólidos, obter cortes no mesmo ou construí-los é um processo que, geralmente, desperta grande interesse do estudante, o qual pode mudar a posição do objeto de modo a obter a melhor forma de visualizar os elementos que constituem o sólido. A figura 3, ilustra um tetraedro regular de base ABC e vértice V e sua planificação obtida neste software. As ferramentas oferecidas pelo software permitem escolher o melhor ângulo para a visualização, bastando para tal mover o vértice V.

Figura 3. Tetraedro e sua planificação.



Fonte: Construção do autor no Cabri 3D.

A pesquisa

Ao iniciarmos a disciplina de Fundamentos de Geometria no Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, no primeiro semestre letivo de 2014, buscamos verificar o conhecimento prévio de dez estudantes a respeito de *softwares* de Geometria Dinâmica, bem como sobre as funções projeção estereográfica e inversão, fundamentais para a compreensão de determinadas propriedades de modelos não euclidianos.

No plano de curso da disciplina constam alguns tópicos a respeito de geometrias não euclidianas, como elíptica, hiperbólica, fractal, topológica, dentre outras. Em anos anteriores, constatamos, empiricamente, que os estudantes chegavam, em grande maioria, sem conhecimentos mínimos sobre tais conteúdos e até mesmo completo desconhecimento, o que nos levou a formalizar metodologicamente tal constatação.

Neste sentido, a partir de um questionário inicial traçamos o perfil dos envolvidos para verificar se cada um é professor em exercício e em qual nível de ensino atua; ano de conclusão da graduação, se em universidade pública ou em outra modalidade; se o curso foi de licenciatura ou bacharelado. Entendemos a função do questionário, como elemento de pesquisa, em acordo com o que indicam Fiorentini e Lorenzato (2007), ou seja, serve para coletar informações sobre um dado indivíduo ou sobre um grupo focal. Tais informações devem estar relacionadas a um determinado fato, a uma situação ou a um fenômeno. Ele é um instrumento reunindo perguntas que podem ser de dois tipos “abertas” ou “fechadas”. Na primeira situação, o questionário, por “oferecer respostas predeterminadas em número limitado de escolhas, este instrumento é considerado, por um lado, mais objetivo do que a entrevista e, por outro, suscetível de ser respondido, como a associação livre, por um número maior de sujeitos" (Maia, 2009, p. 28). Na segunda, o investigado fica mais livre para dar suas respostas, o que, em geral, produz uma gama maior de respostas. No questionário aplicado em nossa pesquisa há questões dos dois tipos.

Os dados obtidos deste questionário nos permitiram concluir que, o ano de conclusão do curso variou de 1995 até 2013; 3 dos investigados atuam no Ensino Fundamental, 3 no Ensino Médio e 2, concomitantemente, nos dois níveis. Um deles atua em cursos preparatórios e, apenas um não atua como professor.

Por entendermos que nossa pesquisa não se preocupou em testar hipóteses e, sim, desenvolvê-las, ela se enquadra no que Moreira (2011) denomina qualitativa observacional. Para o autor, "Os fenômenos de interesse da pesquisa qualitativa em ensino têm também a ver com ensino propriamente dito, aprendizagem, currículo, avaliação e contexto, mas são analisados sob outros pontos de vista" (p. 49)

Enquadramos a pesquisa como qualitativa uma vez que pesquisamos: junto a estudantes de um mestrado profissional, os quais atuam como professores na escola básica; sobre conteúdos geométricos e possibilidades de conhecê-los durante o curso e dar subsídios para aplicá-los em sua prática profissional; por ela poder ser um mecanismo de inovação curricular. Do mesmo modo, ela pode orientar o encaminhamento da disciplina de Geometria neste curso e, por esse motivo, damos alguns indicativos de possibilidades de inserção no currículo, não somente apresentando os dados coletados como também enriquecendo o artigo, no nosso entender, com exemplificações.

Assim, a segunda questão do instrumento de coleta de dados consistia em verificar o conhecimento dos investigados sobre *softwares* de Geometria Dinâmica. Também buscava verificar o nível desse conhecimento pelos mesmos. Foram indicadas as alternativas GeoGebra, GeoGebra 3D, Cabri, Cabri 3D, Maple, em que deveriam assinalar com um X e espaço para outros. Ao lado de cada um, havia um espaço para indicarem o nível do conhecimento.

A análise das respostas sobre o conhecimento do GeoGebra demonstrou os seguintes resultados:

- um dos respondentes afirma "Apenas leitura de trabalhos falando sobre o software";
- um diz conhecer pouco;
- um informa ser seu conhecimento intermediário e que utilizou pouco;
- dois apresentam conhecimento básico e dois conhecimentos intermediários;
- um médio e um bom.

Com relação ao GeoGebra 3D, todos responderam não terem conhecimento enquanto ao Cabri 3D, um dos investigados disse ter um conhecimento básico. Este investigado informou ser básico seu conhecimento sobre todos os *softwares* indicados.

Quanto ao Cabri, um disse ter conhecimento básico, outro bom e os demais desconhecem.

Por fim, quanto ao software Maple, um conhece pouco, um tem conhecimento básico, um tem conhecimento bom e os demais desconhecem.

A terceira questão da investigação foi muito interligada com a anterior e destinava-se aos que atuam como professores. Dos dez respondentes, nove atuam como professores e, nossa hipótese é que utilizariam algum dos *softwares* assinalados ou que viessem a citar. A questão tinha o seguinte enunciado:

1. Se atuas como professor, qual é o uso que fazes de *softwares*?
( ) uso com frequência com meus alunos. Quais deles?____________________________

( ) uso muito pouco. Quais deles? ____

( ) já usei algumas vezes. Quais deles? ____

(...) nunca usei. Quais deles?____

(...) outra situação. Quais deles?____

Um aluno assinalou ter usado o Winplot quando atuou no Ensino Médio. O GeoGebra foi utilizado por sete mestrandos, enquanto o Excel, apenas por um, assim como o Cabri. Já o Winplot foi utilizado por três deles. Como pode ser percebido, muito embora tenham assinalado o pouco conhecimento sobre o GeoGebra, foi o software mais conhecido e utilizado, corroborando nosso conhecimento empírico a respeito.

Para Santos (2009) o Cabri é um software que possui "particularidades de satisfazer, ao mesmo tempo duas características: ser um instrumento (e produto) de pesquisa nas áreas de Educação Matemática e Informática Educacional e apresentar-se como um instrumento didático de grande difusão" (p.184). Assim, ter o conhecimento de *softwares* educacionais como este torna-se algo importante para estudantes de um mestrado que têm o anseio de melhorar sua prática educativa. Muito embora ele seja um *software* proprietário, há possiblidade de uso de uma versão demonstrativa válida por um mês, na qual é possível o profissional verificar adaptação ao mesmo e também o grau de facilidade ou dificuldade de lidar com esta tecnologia. Considerando que ele foi um dos pioneiros em Geometria Dinâmica, acreditamos que sua interface proporciona uma forma atrativa de envolver pessoas que não têm maior interesse ou gosto pela tecnologia a utilizá-lo.

Segundo o mesmo autor, o software "apresenta-se como um instrumento privilegiado no desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico propostos por Van-Hiele" (Ibidem, p. 186). Nesta teoria de desenvolvimento do raciocínio em Geometria, por níveis de conhecimento, os indivíduos têm a possibilidade de desenvolver pensamento geométrico, em geral, partindo da exploração intuitiva até chegar ao nível mais avançado que é o de estabelecer comparativos entre diversas axiomáticas para a Geometria o que, para nosso artigo, é relevante no sentido de identificar, por exemplo, como é o paralelismo na euclidiana e em outras não euclidianas, como a hiperbólica e elíptica. Não iremos no artigo nos atermos a discutir *softwares* e tão pouco especificar vantagens e desvantagens de um ou de outro pois entendemos que a escolha de um deles é dependente do gosto de quem vai utilizar a ferramenta computacional e suas primeiras experiências bem sucedidas com um software.

Na sequência da investigação questionamos o seguinte:

Em Geometria existe uma função chamada INVERSÃO (de pontos e de circunferências, por exemplo). Em tua vida profissional:

( ) conheces ( ) conheces pouco ( ) não lembras ( ) desconheces

Nenhum dos investigados assinalou conhecer ou conhecer pouco. Dois assinalaram desconhecer e os demais assinalaram não se lembrarem. Observa-se, com isto, que, o fato de a maioria absoluta afirmar não se lembrar, em nosso entender, mostra que, embora possa ter sido tratado em algum momento na formação inicial dos professores, não foi significativa a aprendizagem de tal conteúdo, se é que ela ocorreu.

Na sequência o investigador apresentou a seguinte questão aberta: no caso de teres algum conhecimento ou lembrança, cita o que conheces ou lembras e para o quê ela serve. Evidentemente que, pelo fato de desconhecerem ou não se lembrarem do assunto, nenhum dos investigados completou este item.

Questionamos também sobre o conhecimento da função Projeção Estereográfica de forma análoga ao feito para a função Inversão com as questões a seguir.

Em Geometria existe a função PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA. Em tua vida profissional:

( ) conheces ( ) conheces pouco ( ) não lembras ( ) desconheces

Na sequência apresentamos o seguinte: no caso de teres algum conhecimento ou lembrança cita o que conheces ou lembras e para que ela serve ou onde se usa.

Desta feita a resposta foi mais incisiva no desconhecimento da função, o que foi feito por sete dos dez entrevistados e apenas três afirmaram não se lembrarem. Como consequência, nenhuma citação a respeito foi apresentada.

Faz-se necessário, portanto, que no decorrer do curso sejam desenvolvidas atividades que despertem nos estudantes o desejo de conhecimento da função e de suas aplicações e que atendam às expectativas que eles apresentaram a respeito da disciplina, no último item do instrumento de investigação. As expectativas são apresentadas no quadro 1, a seguir.

Quadro 1. Expectativas em relação à disciplina Fundamentos de Geometria.

EXPECTATIVA
De ampliação dos conhecimentos de geometria. Principalmente, por acreditar que o conhecimento que tenho é muito elementar para um licenciado em matemática. Pois, para dar uma boa aula, primeiro preciso ter conhecimento suficiente do conteúdo e domínio para transferir didaticamente ao aluno e ajudá-lo na construção do seu conhecimento.
Aprofundar os conhecimentos e conhecer os itens 04 e 06.
Ter um maior conhecimento da Geometria e poder aplicá-la de forma mais segura no cotidiano escolar, melhorando e aprimorando as aulas no Ensino Fundamental.
Aprender a utilizar os recursos citados para trabalhar os conteúdos que me são familiares e aprender geometria de uma forma diferente, estudar os principais autores, pesquisadores e teorias que giram em torno do tema.
Sanar lacunas e aprofundar os conhecimentos na área.
Espero aprender e trabalhar mais a fundo a Geometria, conheço o trabalho do professor de alguns trabalhos apresentados e leituras durante a graduação.
Apesar de ter pouco conhecimento em utilizar *softwares* de geometria, eu gosto e acredito muito no ensino aliado a esses complementos, que tornam as aulas mais interessantes e criativas. Dessa forma, espero adquirir maiores conhecimentos tanto de Geometria como de *softwares* e poder aplicá-los com meus alunos.
Espero atingir todos os objetivos propostos e aprender conteúdos e práticas, que seja possível sua aplicação em sala de aula.
Pelo conhecimento da disciplina no semestre passado acredito que teremos aulas dinâmicas e muitas contribuições para uso em sala de aula.

Podemos observar que os mestrandos apresentam boa expectativa da disciplina Geometria no Mestrado, desejando aquisição de novos conhecimentos, uso de *softwares* para aplicação com seus alunos, conhecer as duas funções envolvidas na pesquisa, ou resumindo, ter uma nova visão de Geometria.

Em consequência dos resultados do desconhecimento das duas funções e, também, pelas expectativas dos estudantes, sugerimos a utilização de *softwares* para o estudo das funções particulares, a saber, a Inversão em relação à circunferência e a Projeção Estereográfica, o que foi feito na sequência do curso de Geometria. Dessa forma podemos começar a introduzir outras geometrias na formação do professor, de forma amena e sem demasiado aprofundamento teórico, especialmente utilizando os softwares também desconhecidos ou de pouco conhecimento e uso no ambiente escolar, com a exploração especialmente da visualização.

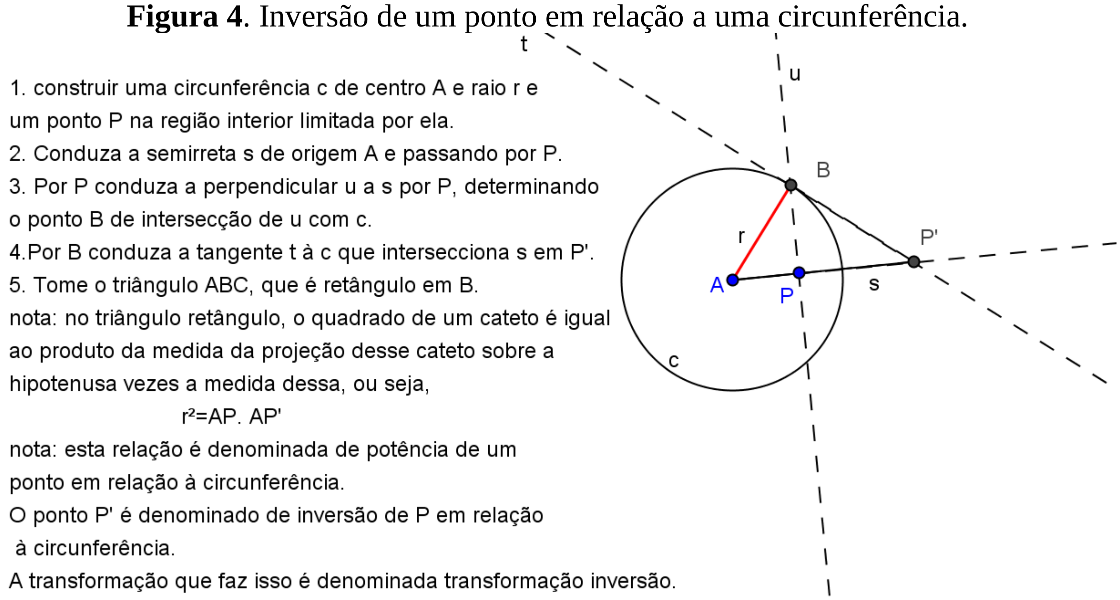
Tanto o software GeoGebra, quanto o Cabri 3D oferecem a ferramenta inversão, a qual é importante para a obtenção das retas no modelo de Poincaré, ou seja, os arcos que interseccionam o disco ortogonalmente, como ilustrado nas figuras 1 e 2.

Definimos transformação inversão T associada a uma circunferência de centro A e de raio r, contida em um plano, a uma função bijetora que associa a cada ponto P desse plano um ponto P’ de modo que P’=T(P) pertence à semirreta AP e o produto das medidas dos segmentos AP e AP’ é igual ao quadrado da medida do raio da circunferência.

Uma sugestão de sequência de passos para a construção da inversão é dada na figura 4, de modo que o estudante possa compreender fatos geométricos até mesmo em sua formação inicial na escola básica, como por exemplo, a relação da função com a potência de um ponto em relação à circunferência que consta de alguns livros didáticos de Matemática do Ensino

Fundamental. Utilizando a ferramenta “texto” do GeoGebra, podemos incluir na própria janela de visualização o caminho percorrido na construção.
Nota 1. No triângulo retângulo, o quadrado de um cateto é igual a medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa vezes a medida dessa, ou seja, $r^2=AP.AP'$
Nota 2. Esta relação é denominada de potência de um ponto em relação à circunferência.
Nota 3. O ponto P' é denominado de inversão de P em relação à circunferência.
Nota 4. A transformação que faz isso é denominada transformação inversão em relação à circunferência.

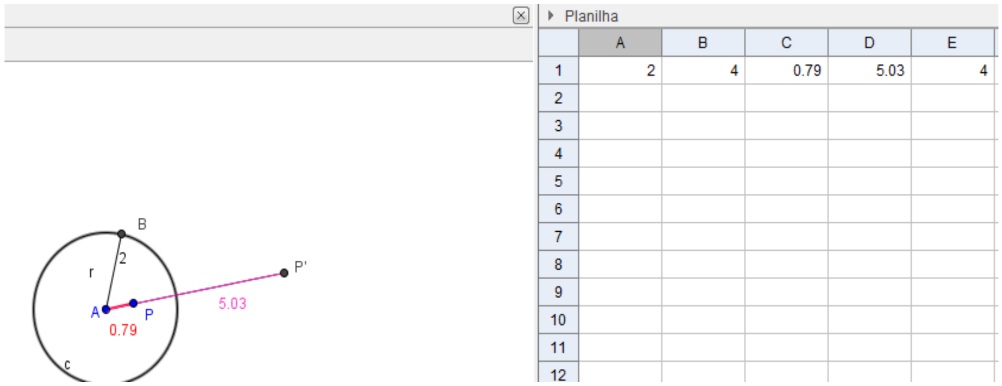
Figura 4. Inversão de um ponto em relação a uma circunferência.



Fonte: Construção própria no GeoGebra.

Notemos que, a partir dessa construção, é possível utilizar a dinâmica do software para analisar possibilidades de localização do ponto de inversão, bastando para tal deslocar P. É possível introduzir uma tabela, ao lado da janela de visualização, e alocar os valores de r, raio da circunferência, (coluna A), o quadrado desse valor (coluna B), med(AP) (coluna C), med(AP’) (coluna D) e o produto med(AP) x med(AP’) (coluna E), como ilustrado na figura 5. Ao movimentar o ponto A ou o ponto P, temos as variações dinâmicas nas colunas C e D. Entretanto, os valores na coluna E, resultados do produto dessas duas medidas, se mantêm constante e com o mesmo valor do quadrado da medida do raio que se encontra na coluna B.

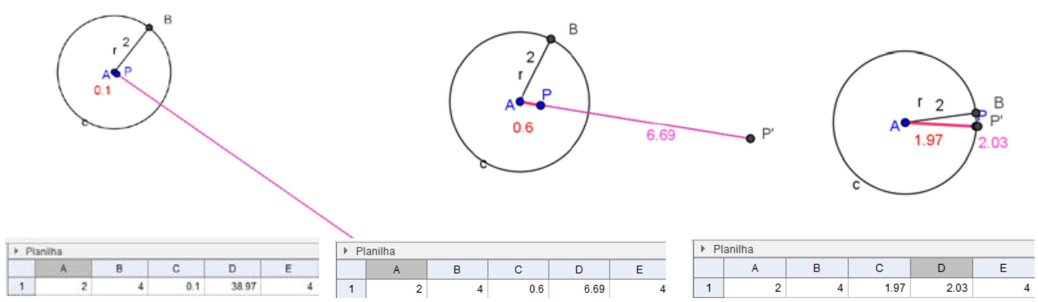
Figura 5. Tabela no GeoGebra ilustrando a inversão do ponto P.



Fonte: Construção própria no GeoGebra.

Dessa forma, a análise da variação na tabela permite observarmos que, na medida em que o ponto P se aproxima de A, os valores na coluna C se tornam cada vez menores se aproximando de zero enquanto que os valores na coluna D aumentam infinitamente. Por exemplo, para o valor na coluna C igual a 0,6, o valor correspondente na coluna D é de 6,66 e, para o valor 0,1 na C o correspondente na D é 40,63 e assim por diante. Por outro lado, quando P se aproxima da circunferência pela região interior, o P' também se aproxima, porém pela exterior (figura 6). Este dinamismo oferecido pelos recursos do software, como indicado por Gravina e Basso (2012), pode ser um forte aliado na aquisição da visualização no sentido apontado por Leivas (2009).

Figura 6. Variação da posição do ponto e a respectiva potência.

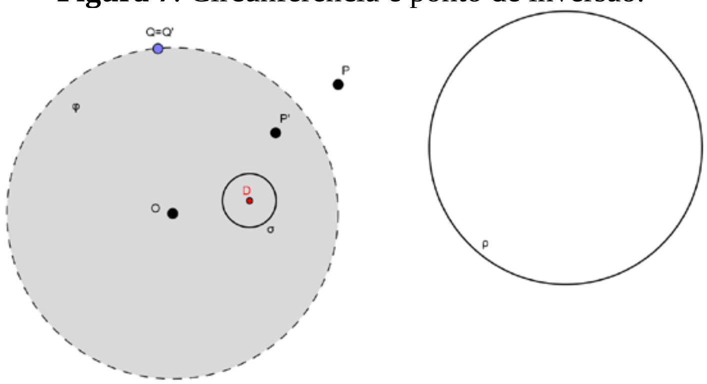


Fonte: Construção do autor no GeoGebra.

Um questionamento natural é para onde vai o ponto P' quando o ponto P pertence à circunferência? E se ele ultrapassar a circunferência? Não é nosso objetivo descrever neste artigo um modelo hiperbólico, como frisamos antes, e, nem tão pouco, realizar um estudo sobre a função inversão. Nosso objetivo é chamar a atenção de que ela é fundamental para a construção de paralelas no modelo de Poincaré, como ilustrado nas figuras 1 e 2 no início do artigo, merecendo pois uma atenção especial.

No caso do ponto P se localizar na região exterior da circunferência seu inverso cai na região interior. Por outro lado, ele não pode ser o centro da circunferência, pela própria definição de inversão. Com o intuito de impor a condição de que a função seja bijetora, define-se a imagem do centro da circunferência como sendo um ponto no infinito, o qual é acrescido ao plano euclidiano, isto é, $R^2 \cup \infty$. Este é denominado de plano inversivo. No caso do ponto Q pertencer à circunferência, então o seu inverso é ele mesmo. A partir desses pressupostos podemos tomar circunferências com raios menores do que o da circunferência inicial, não contendo o centro dessa, e obter também sua inversa em relação à circunferência inicial. Nesta situação, obteremos circunferências na região exterior, como ilustrado na figura 7 a seguir.

Figura 7. Circunferência e ponto de inversão.



Fonte: Construção do autor no GeoGebra.

De forma similiar, utilizando a dinâmica do software, movimentamos os objetos geométricos e obtemos a visualização das circunferências de inversão. Na medida em que as circunferências menores, na região interior da maior, se aproximam da maior, o seu inverso se torna menor e se aproxima da circunferência pela região exterior. Por outro lado, quando a menor se aproxima do centro da maior, o raio da inversão se torna infinitamente grande.

A partir dessa pequena incursão em uma ferramenta para compreender alguns fundamentos de uma geometria não euclidiana, por meio de uma função específica, a Inversão, passamos ilustrar alguns aspectos da segunda função desconhecida pelos investigados, a saber, a Projeção Estereográfica.

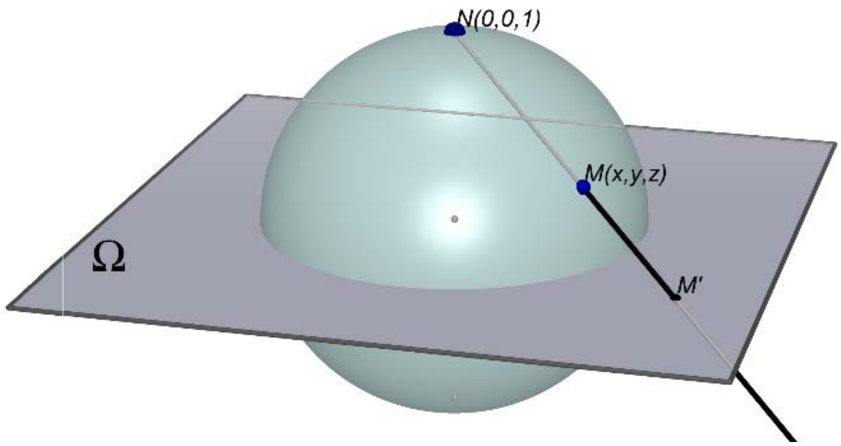
Esta função, de acordo com Struik (1955) já era conhecida por Ptolomeu (150 d.C.) que a descreveu na sua Geografia. Para o autor, parece que suas origens remontam a Hiparco (150 a.C.) e, ainda mais, “Foi utilizada na construção de mapas pelo matemático flamengo Gemma Frisius (1540). O nome aparece pela primeira vez no livro de ótica do belga F. d’Aiguillon (1613).” (p. 199).

Para definirmos a função Projeção Estereográfica, vamos considerar no espaço tridimensional a lei que caracteriza uma esfera unitária $S^2=\{x^2+y^2+z^2=1\}$, ou seja, centro na origem e raio unitário. O polo norte dessa esfera é dado pelas coordenadas N=(0,0,1), como na figura 8, a seguir. No sistema cartesiano ortogonal tomemos o plano horizontal XOY, denotado por Ω e um ponto qualquer da esfera $M \neq N$. A projeção estereográfica com centro de projeção N é a função definida por

$$\begin{array}{l} \varphi: S^2 - \{N\} \to \Omega \\ M \quad \to \quad \varphi(M) = M' = \overrightarrow{NM'} \cap \Omega. \end{array}$$

Intuitivamente, ela pode ser percebida como sendo uma bijeção entre a esfera menos um ponto e o plano.

Figura 8. Projeção estereográfica da esfera menos um ponto.

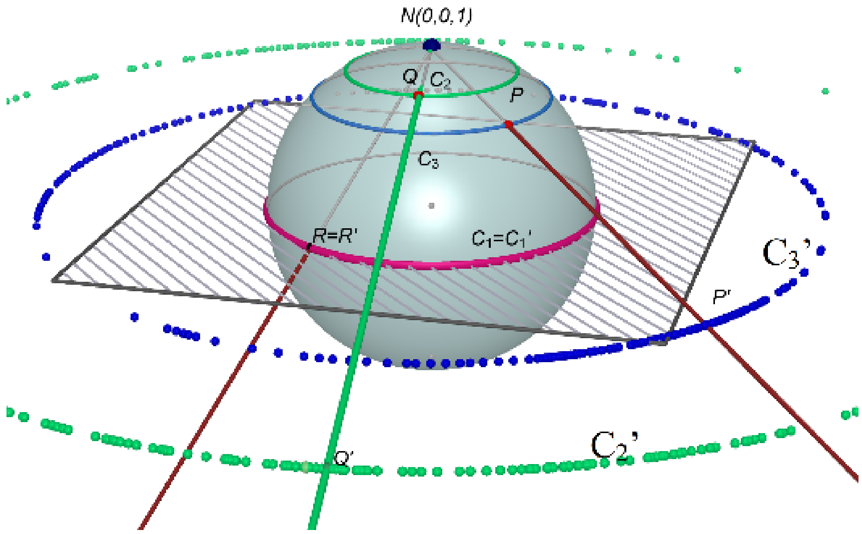


Fonte. Construção própria no Cabri 3D.

Como não há projeção do polo norte, uma vez que a semirreta se torna paralela ao plano, dizemos que este ponto se torna um ponto limite dessa e se denomina ponto no infinito. Klein (1927) afirma que "Reciprocamente, para todos os pontos do infinito, se obtém como homólogo a origem de coordenadas; utilizando a terminologia já antes introduzida, diremos que a este ponto lhe corresponde um ponto único do plano do infinito." (p. 132, trad. nossa). No caso da figura 8, a esfera e o plano são homólogos.

A Projeção tem uma propriedade importante que é tomar circunferências sobre a esfera e transformá-las em circunferência homólogas no plano. Quando as primeiras passam pelo polo norte, suas homólogas passam pelo ponto no infinito no plano, isto é, são retas, como ilustraremos na figura 9 e, neste caso, as circunferências apresentam raios cada vez maiores.

Figura 9. Projeções de circunferências da esfera no plano.



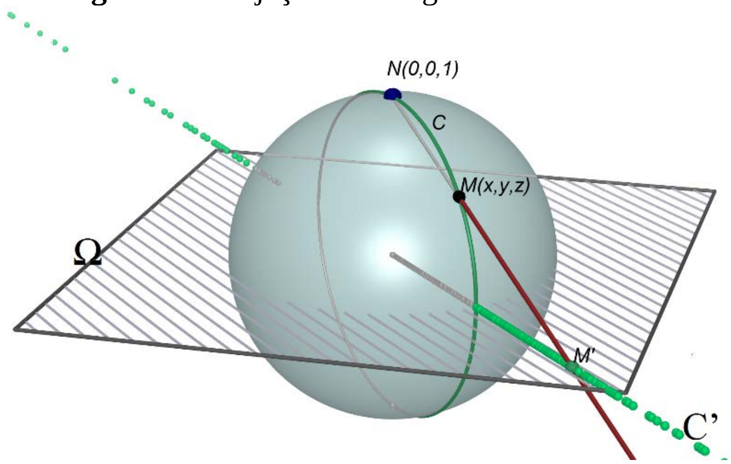
Fonte: Construção do autor no Cabri 3D.

Observamos que a circunferência C_1 é a intersecção da esfera com o plano e, por isso, tem por projeção no plano ela mesma. A circunferência C_3, mais próxima, digamos, a ela tem sua projeção C_3' em azul e, a C_2, que se encontra mais próxima do polo norte, é a C_2' e já apresenta um raio bem maior com a tendência ao infinito. Invocamos Leivas (2009), Gravina e Basso (2012), ao destacarem os construtos mentais, os quais podem ser desenvolvidos com a tecnologia uma vez que ao observar o dinamismo do software, o estudante pode movimentar o ponto que caracteriza as circunferências na esfera de modo que, ao afastá-las ou aproximá-las do polo norte, obtenha as circunferências projetadas no plano, o que não é tão fácil de ser percebido em construções convencionais com lápis, papel ou outro tipo de representação como são costumeiramente utilizadas no ambiente escolar ou universitário.

Por outro lado, a construção obtida acima corrobora o que Santos (2009) afirmou a respeito do papel que o Cabri desempenha no desenvolvimento do pensamento geométrico segundo os níveis de Van Hiele. Se, por um lado, podemos perceber na tela do computador o movimento das circunferências e suas projeções no plano, evidenciando o primeiro nível da teoria, o da visualização, por outro lado podemos relacionar axiomáticas, o que ocorre no nível mais avançado.

Vejamos como se comportam circunferências máximas da esfera ao serem projetadas. Como já analisamos anteriormente a C_1, que representa a linha do equador no globo terrestre, vejamos os meridianos, ou seja, as circunferências que passam pelos polos norte e sul. Para tal, façamos uma construção similar à feita na figura 9, em que C representa um meridiano qualquer. Utilizamos a Projeção Estereográfica para obter a homóloga a C no plano, ou seja, a reta C' (figura 10). Assim, esta função leva meridianos da esfera em retas no plano de projeção, que passam pela origem das coordenadas. Desta forma, podemos identificar tais circunferências máximas da esfera como “retas” em uma geometria não euclidiana. Elas também são denominadas geodésicas da superfície. Uma geometria desenvolvida sobre a esfera é denominada Elíptica, Esférica ou Riemanniana.

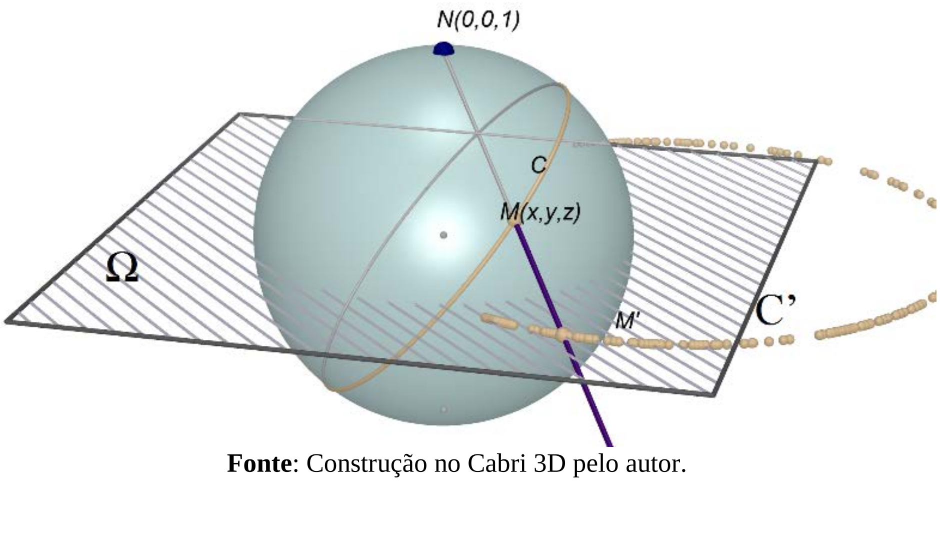
Figura 10. Projeção estereográfica de meridianos.



Fonte: Construção própria.

Por último obteremos as projeções de algumas circunferências máximas da esfera, a saber, circunferências obtidas pela interseção da esfera com um plano que passe pelo seu centro. Vejamos isso quando o plano não é aquele que contem a linha do equador, o que já foi feito anteriormente. A figura 11, ilustra a projeção estereográfica de uma circunferência máxima C sobre o plano, a qual também é uma circunferência C' no plano. Disto se pode concluir que a projeção estereográfica da esfera leva circunferências em circunferências ou em retas.

Figura 11. Projeção estereográfica de circunferências máximas da esfera.



Fonte: Construção no Cabri 3D pelo autor.

Outras propriedades sobre a Projeção Estereográfica poderíamos mostrar, mas como o objetivo do artigo não é esse, apenas damos algumas ilustrações de suas características, deixando ao leitor interessado aprofundar estudos a respeito.

Considerações Finais

Apresentamos no artigo resultados de uma pesquisa realizada com alunos de uma disciplina de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática, na qual buscamos verificar o conhecimento e o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica na prática profissional destes estudantes.

Investigamos também o conhecimento desses alunos a respeito de duas funções: Inversão e Projeção Estereográfica, por considerarmos sua relevância para a compreensão de geometrias não euclidianas, particularmente sobre Hiperbólica e Elíptica, não sendo, entretanto, objetivo do trabalho estudos a respeito das mesmas.

Buscamos ilustrar alguns aspectos históricos sobre as duas Geometrias Não-Euclidianas e, no decorrer do artigo, mostramos alguns fatos básicos na tentativa de despertar nos leitores o desejo de aprofundar estudos a respeito uma vez que o autor tem comprovado, em suas pesquisas, o pouco ou nenhum conhecimento dessas e de outras geometrias tanto na formação inicial na Licenciatura em Matemática quanto na pós-graduação em várias instituições do Rio Grande do Sul.

Nesse sentido, apresentamos possiblidades de desenvolver, por exemplo, conceito da função Inversão com aplicação do software GeoGebra associado a conceitos de Geometria Hiperbólica. Também, utilizando o Cabri 3D, definimos e ilustramos fatos relativos à função Projeção Estereográfica associados à Geometria Projetiva e Esférica.

Além disso, buscamos associar conceito de visualização como construto mental que acreditamos ser possível e útil para a formação de um pensamento geométrico. A utilização dos dois *softwares* prendeu-se ao fato de que o investigador, na sequência do desenvolvimento do conteúdo da disciplina, espaço no qual foi realizada a investigação, os utiliza para a reconstrução geométrica.

Os resultados da investigação mostraram o pouco uso de *softwares* para o ensino de Geometria, particularmente na escola básica. Foi comprovado também o total desconhecimento ou falta de lembrança sobre as duas funções especificadas. Por sua vez, os estudantes mostraram a expectativa e o desejo de adquirir novos conhecimentos, metodologias e técnicas para um novo fazer geométrico em sua prática profissional. Além disso, explanaram o desejo de conhecer as duas funções ora em apreço.

Esperamos produzir novos trabalhos, com os estudantes investigados, os quais venham a dirimir os pontos negativos levantados na pesquisa, bem como para que eles adquiram novos conhecimentos a respeito do ensino de Geometria.

Notas

1. As traduções constantes no artigo são livres e realizados pelo autor.

Referências

ARCARI, I. **Um texto sobre geometria hiperbólica**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, SP, 2008.

BICUDO, Irineu (trad.). **Os Elementos**/Euclides. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

FIORENTINI, D.; LORENZARO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 2 ed. Campinas: Autores Associados, 2007. – (Coleção formação de professores).

HOFFER, A. Geometry is more than proof. In: **Mathematics teacher**, v. 74, n.1, p. 11-18, 1981.

GRAVINA, M.A.; BASSO, M.V. de A. **Mídias Digitais na Educação Matemática**. In: Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática. (Org.) Maria Alice Gravina...[et al.]. Porto Alegre: Evangraf, 2012, pp.11-35.

GREENBERG, M.J. **Euclidian and Non-Euclidean Geometries**. 3. Ed. USA: W.H. Freeman and Company, 1994

LEIVAS, J.C.P. **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

______. Triângulos Diferentes: Dos Planos Aos Geodésicos. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.13, n.1, pp.77-93, 2011.

MAIA, L.de S. L. Vale a pena ensinar Matemática. In: **Pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula.** BORBA, R. e GUIMARÃES, G. (org) São Paulo: Cortez, 2009. pp.13-57.

MLODINOW, L. **A janela de Euclides**: a história da geometria das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

OLIVEIRA, A. J. FRANCO de. Fundamentos da Geometria – David Hilbert. Lisboa: Gradiva, 2003.

SANTOS, M. C. dos. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: **Pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula.** BORBA, R. e GUIMARÃES, G. (org) São Paulo: Cortez, 2009. pp.177-211.

STRUIK, D. J. **Geometría Diferencial Clásica**. (trad). L. Bravo Gala. Madri: Aguilar, 1955.

Correspondência

José Carlos Pinto Leivas: Professor titular aposentado da FURG e Professor do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática e do Mestrado e Doutorado em Ensino em Ciências e em Matemática da UNIFRA.

E-mail: leivasjc@unifra.br

Texto publicado em *Currículo sem Fronteiras* com autorização do autor